Adı Soyadı:
Numarası:

03.01.2020

2019-2020 EĞİTİM ÖĞRETİM YILI GÜZ YARIYILI
SIRA İSTATİSTİKLERİ DERSİ FİNAL SINAVI SORULARI

1. X_1, X_2, X_3, X_4 olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$f_X(x) = \begin{cases} 2x & , \quad 0 < x < 1 \\ 0 & , \quad dd \end{cases}$$

olan dağılımdan çekilmiş örnek boyutu 4 olan rasgele bir örneklem olsun. $Y_1 < Y_2 < Y_3 < Y_4$ ise bu örneklemin sıra istatistikleri olmak üzere;

a) Y_3 ve Y_4 sıra istatistiklerinin ortak olasılık yoğunluk fonksiyonunu ($f_{Y_3,Y_4}(y_3, y_4)$) bulunuz. (25p)

b) Y_4 verildiğinde Y_3 ün koşullu olasılık yoğunluk fonksiyonunu ($f(Y_3 / Y_4)$) bulunuz. (25p)

2. $X_1, X_2, \ldots, X_n$, olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$f_X(x) = \begin{cases} 1 & , \quad 0 < x < 1 \\ 0 & , \quad dd \end{cases}$$

olan $(0,1)$ aralığında düzgün dağılıma sahip olan bir kitleden çekilmiş rasgele örneklemi ve $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ ler ise bu örnekleme ilişkin sıra istatistiklerini temsil etsinler.

a) j. sıra istatistiğinin olasılık yoğunluk fonksiyonunu bulunuz. (25p)

b) j. sıra istatistiğinin beklenen değerini bulunuz. (25p)

Not: *Aşağıdaki bilgilerden yararlanabilirsiniz.*

Beta fonksiyonu : $\int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}dx = \dfrac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$, $\Gamma(n) = (n-1)!$

Başarılar Dilerim...
Doç. Dr. Pelin KASAP

CEVAP ANAHTARI

Çözüm 1 :

a) Y_3 ve Y_4 sıra istatistiklerinin ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$f_{Y_3Y_4}(y_3,y_4) = \frac{4!}{2!\,0!\,0!}\underbrace{(y_3^2)^2}_{F_X(y_3)}\underbrace{(y_4^2-y_3^2)^0}_{F_X(y_4)-F_X(y_3)}\underbrace{(1-y_4^2)^0}_{1-F(y_4)}\cdot\underbrace{2y_3}_{f(y_3)}\cdot\underbrace{2y_4}_{f(y_4)}$$

$$= 12y_3^4\cdot 2y_3\cdot 2y_4$$

$$f_{Y_3Y_4}(y_3,y_4) = \begin{cases} 48\,y_3^5\,y_4 & , \quad 0<y_3<y_4<1 \\ 0 & , \quad dy \end{cases}$$

elde edilir

b) $$f(Y_3 / Y_4 = y_4) = \frac{f(y_3,y_4)}{f_{Y_4}(y_4)}$$

Burada Y_4-ün marjinal olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$f_{Y_4}(y_4) = \int_{y_3=0}^{y_4} f_{Y_3Y_4}(y_3,y_4)\,dy_3 = \int_0^{y_4} 48\,y_3^5\,y_4\,dy_3 = 48y_4\int_0^{y_4} y_3^5\,dy_3$$

$$= 48y_4\cdot\frac{y_3^6}{6}\Bigg|_0^{y_4} = \begin{cases} 8y_4^7 & , \quad 0<y_4<1 \\ 0 & , \quad dy \end{cases}$$

bulunur. Buradan Y_4 verildiğinde Y_3-ün koşullu olasılık yoğ fonk,

$$f(Y_3 / Y_4 = y_4) = \frac{48y_3^5\,y_4}{8y_4^7}$$

$$= \frac{6y_3^5}{y_4^6} \quad , \quad 0<y_3<y_4<1$$

elde edilir

Çözüm 2:

a) $$f_{X_{(j)}}(x) = \frac{n!}{(j-1)!\,(n-j)!} \cdot [F(x)]^{j-1} [1-F(x)]^{n-j} \cdot f(x)$$

idi. $X_1, \dots, X_n \sim U(0,1)$ ise

$$f(x) = \begin{cases} 1 & , \quad 0<x<1 \\ 0 & , \quad dy \end{cases}$$

ve buradan

$$F(x) = \int_0^x f(x).dx = \int_0^x 1.dx = x$$

ise j-inci sıra istatistiğinin olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$f_{X_{(j)}}(x) = \frac{n!}{(j-1)!\,(n-j)!} x^{j-1} . (1-x)^{n-j} . 1$$

$$= \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(j) . \Gamma(n-j+1)} . x^{j-1} (1-x)^{n-j}$$

olup $X_{(j)} \sim Beta(j, n-j+1)$, $j=1,2,\dots n$

dir. j-inci sıra istatistiğinin beklenen değeri

b) $$E(X_{(j)}) = \int_0^1 x . \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(j)\,\Gamma(n-j+1)} . x^{j-1} (1-x)^{n-j} . dx$$

$$= \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(j)\,\Gamma(n-j+1)} \cdot \underbrace{\int_0^1 x^{j}\,(1-x)^{n-j}\,.\,dx}_{\frac{\Gamma(j+1)\,.\,\Gamma(n-j+1)}{\Gamma(n+2)}}$$

$$= \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(j)\,\Gamma(n-j+1)} \cdot \frac{\Gamma(j+1)\,\Gamma(n-j+1)}{\Gamma(n+2)}$$

$$= \frac{n!}{(j-1)!\,\cancel{(n-j)!}} \cdot \frac{j!\,(n-j)!}{(n+1)!} = \frac{\cancel{n!}}{\cancel{(j-1)!}} \cdot \frac{j\,\cancel{(j-1)!}}{(n+1)\,.\,\cancel{n!}}$$

$$E(X_{(j)}) = \frac{j}{n+1}$$

olarak bulunur.